Subiect	Parțial	Total
1. Total punctaj subiect 1		**10**
a) $T=2\sigma\cdot b$, $\sin\beta=\dfrac{a/2}{b}$, $\Delta\ell=\ell'-l=\dfrac{a}{\sin\beta}(\beta-\sin\beta)$,	1	**3**
$2\sigma\cdot\dfrac{a}{2\sin\beta}=k\dfrac{a}{\sin\beta}(\beta-\sin\beta)$	1	
$k=\dfrac{\sigma}{\beta-\sin\beta}\approx 33N/m$	1	
b) $E=\dfrac{Ba^2\omega}{2}$, $\begin{cases}E_{echivalent}=E\\ R_{echivalent}=\dfrac{R}{4}\end{cases}$, $I_{spițp}=\dfrac{E}{4R}$	1	3
Un fir parcurs de curent și supus acțiunii simultane a câmpului magnetic se curbează luând forma unui arc de cerc cu raza *c* $T=B\cdot I\cdot c$	0,75	
pentru o porțiune oarecare de lungime *d* echilibrul forței datorate tensiunii superficiale și forței magnetice cere ca $2\sigma\cdot d=B\cdot I_{spițp}\cdot d$	0,75	
$\omega=\dfrac{8\sigma R}{B^2a^2}=8rad/s$	0,5	
c) Notând S_M și v_M secțiunea și viteza jetului de apă care părăsește jgheabul prin capătul *M* respectiv S_N și v_N secțiunea și viteza jetului de apă care părăsește jgheabul prin capătul *N,* legile de conservare pentru energie și respectiv pentru impulsul orizontal se scriu $\begin{cases}\rho\cdot S\cdot\dfrac{v^3}{2}=\rho\cdot S_M\cdot\dfrac{v_M^3}{2}+\rho\cdot S_N\cdot\dfrac{v_N^3}{2}\\ \rho\cdot S\cdot v^2\cdot\sin\alpha=\rho\cdot S_M\cdot v_M^2-\rho\cdot S_N\cdot v_N^2\end{cases}$ conservare a masei $\rho\cdot S\cdot v=\rho\cdot S_M\cdot v_M+\rho\cdot S\cdot v_N$,	1	3
de legea Bernoulli $\rho\cdot\dfrac{v^2}{2}+\rho\cdot g\cdot z+p=const.$, $\begin{cases}\rho\cdot\dfrac{v^2}{2}=\rho\cdot\dfrac{v_N^2}{2}\\ \rho\cdot\dfrac{v^2}{2}=\rho\cdot\dfrac{v_M^2}{2}\end{cases}, v=v_M=v_N$	1	
$\begin{cases}D_M=D\dfrac{1+\sin\alpha}{2}\\ D_N=D\dfrac{1-\sin\alpha}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}D_M=2\dfrac{1+0{,}17}{2}\approx 1{,}17\,dm^3/s\\ D_N=2\dfrac{1-0{,}17}{2}\approx 0{,}83\,dm^3/s\end{cases}$	1	
Oficiu	**1**	

<table>
<tr><td>2. Total punctaj subiect 2</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>a) Condiția de plutire

$$m_{balon} + V_{balon} \cdot \rho_{T_1} = V_{balon} \cdot \rho_{T_0}\ ,\ \rho_{T_1} = \rho_{T_0} - \frac{m_{balon}}{V_{balon}}$$</td><td>1</td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>Cum $\rho = \frac{P \cdot \mu}{R \cdot T}$
Pentru situația descrisă în care aerul rece exterior şi aerul cald din interiorul balonului sunt la aceeaşi presiune,

$$\begin{cases} \frac{\rho_{T_1}}{\rho_{T_0}} = \frac{T_0}{T_1} \\ \rho_{T_1} = \rho_{T_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} \end{cases}$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$$\begin{cases} \rho_{T_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \rho_{T_0} - \frac{m_{balon}}{V_{balon}} \\ T_1 = \frac{\rho_{T_0} T_0}{\rho_{T_0} - \frac{m_{balon}}{V_{balon}}} = \frac{T_0}{1 - \frac{m_{balon}}{V_{balon} \rho_{T_0}}} \end{cases} \quad T_1 = \frac{T_0}{1 - \frac{m_{balon}}{V_{balon} \rho_{T_0}}} = \frac{303}{1 - \frac{20}{100 \cdot 1{,}16}} = 366{,}1K \cong 93°C$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b) Forța care tensionează funia este diferența dintre forța ascensională şi greutatea totală a balonului adică

$$\begin{cases} F_{funie} = \left(V_{balon} \cdot g \cdot \rho_{T_0}\right) - \left(V_{balon} \cdot g \cdot \rho_{T_2} + m_{balon} \cdot g\right) \\ F_{funie} = \left(V_{balon} \cdot \rho_{T_0}\left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right) - m_{balon}\right) \cdot g \end{cases}$$

În cursul urcării balonului densitatea aerului cald scade de asemenea datorită scăderii presiunii. O parte din aerul cald din balon curge din acesta.
Expresia densității aerului atmosferic la înălțime z este

$$\rho_{atm}(z) = \frac{P(z) \cdot \mu}{R \cdot T(z)} = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{P_0 (1 - z / z_0)^6}{T_0 (1 - z / z_0)} = \rho_0 (1 - z / z_0)^5$$

Pentru aerul din balon densitatea la înălțimea z are expresia

$$\rho_{balon}(z) = \frac{P(z) \cdot \mu}{R \cdot T_2} = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{P_0 (1 - z / z_0)^6}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T_2} = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T_2} \cdot (1 - z / z_0)^6$$</td><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Condiția de plutire la înălțimea z este
$m_{balon} + V_{balon} \cdot \rho_{balon}(z) = V_{balon} \cdot \rho_{atm}(Z)$
de unde

$$\begin{cases} \rho_{balon}(z) = \rho_{atm}(z) - \frac{m_{balon}}{V_{balon}} \\ \frac{T_0}{T_2} \cdot (1 - z / z_0)^6 = (1 - z / z_0)^5 - \frac{m_{balon}}{V_{balon} \cdot \rho_0} \end{cases}$$

Cu notația $t = (1 - z / z_0)$ rezolvarea problemei revine la găsirea soluției reale din domeniul $(0,1)$ a ecuației

$$0{,}75 t^6 - t^5 + 0{,}17 = 0$$

Soluția agreată este $t_1 \approx 0{,}86$. În consecință,

$$\begin{cases} 1 - \frac{z}{z_0} = t_1 \\ z = z_0 (1 - t_1) \end{cases}$$

$$z = 49(1 - 0{,}86) = 49 \cdot 0{,}14 = 6{,}86\ km$$

În condițiile problemei, aerul din balon trebuie menținut la $123°C$ în timp ce temperatura atmosferei la înălțimea atinsă este de aproximativ $-12°C$. La</td><td>1</td></tr>
</table>

respectiva înălțime, presiunea atmosferei este aproximativ jumătate din presiunea atmosferică la suprafața Pământului.		
c) $P_{\text{int}} \cdot V_0 \cdot \lambda^3 = n \cdot R \cdot T_0$ $P_{\text{int}} = P_0 + \Delta P = P_0\left(1 + a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)\right)$	1,5	
$a = \frac{P_{\text{int}} - P_0}{P_0\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)} = \frac{\frac{n}{n_0 \cdot \lambda^3} - 1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}}$ $a = \frac{\frac{3{,}6}{1{,}5^3} - 1}{\frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{1{,}5^7}} \approx 0{,}11$	0,5	2
d) Balonul va disloca deci un număr n' de moli de aer $n' = n \cdot \frac{P}{P + \Delta P}$ a căror greutate – egală în modul cu forța ascensională – este $G = F_{ascensionala} = n \cdot \frac{P}{P + \Delta P} \cdot M_A \cdot g$ Condiția de plutire pentru balonul aflat la înălțimea z_f este $M_T \cdot g = n \cdot \frac{P}{P + \Delta P} \cdot M_A \cdot g$ Ecuația de stare pentru heliul din balonul aflat la înălțimea z_f este $\begin{cases} (P + \Delta P) V_0 \cdot \lambda^3 = n \cdot R \cdot T \\ (P + \Delta P) \cdot \lambda^3 = p_0 \frac{n}{n_0} \frac{T}{T_0} \end{cases}$	1	2
$\lambda^2 \cdot \left(1 - \lambda^{-6}\right) = \frac{1}{0{,}11 \cdot 12{,}5}\left(45 - \frac{1{,}12}{0{,}0289}\right) \approx 4{,}54$ Este evident că soluția este supraunitară astfel că într-o primă aproximație termenul care conține λ^{-6} se poate neglija. Soluția aproximativă corespunzătoare este $\lambda_f \approx 2{,}13$ Care verifică rezonabil (cu eroare de 1%) şi ecuația completă. $\begin{cases} \frac{P}{P_0} \cdot \lambda^3 \frac{T_0}{T} = \frac{M_T}{n_0 \cdot M_A} \\ z_f = z_0\left(1 - \sqrt[5]{\frac{M_T}{n_0 \cdot M_A \cdot \lambda_f^3}}\right) \end{cases}$ $z_f = 49\left(1 - \sqrt[5]{\frac{1{,}12}{12{,}5 \cdot 0{,}0289 \cdot 2{,}13^3}}\right) \approx 9{,}96\,km$	1	
Oficiu	**1**	

<table>
<tr><td>3. Total punctaj subiect 3</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>a) $T_1V_1^{n-1}=T_2V_2^{n-1}$; $T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}$</td><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>$\Delta T\begin{cases}<0, \text{dacă } n>1,\\ >0, \text{dacă } n<1\end{cases}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b) $Q=\nu C\cdot\Delta T$; $C=\frac{\delta Q}{\nu\cdot dT}=\frac{\nu C_v dT+pdV}{\nu dT}=C_v+\frac{pdV}{\nu dT}$
$V^{n-1}dT+(n-1)V^{n-2}TdV=0$; $\frac{dV}{dT}=-\frac{V}{(n-1)T}$;</td><td>1</td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>$C=C_v+\frac{R}{1-n}=R\frac{\gamma-n}{(\gamma-1)(1-n)}$
<table>
<tr><td>n</td><td colspan="2"></td><td>1</td><td colspan="2"></td><td>γ</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>$\gamma-n$</td><td>+</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>$1-n$</td><td>–</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>C</td><td>–</td><td>–</td><td>∞</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>n</td><td colspan="2"></td><td>1</td><td colspan="2"></td><td>γ</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>ΔT</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td><td></td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>C</td><td>–</td><td>–</td><td>∞</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>Q</td><td>–</td><td>–</td><td></td><td>–</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>c) $L=\frac{aria\ cercului}{2}=\frac{\pi}{2}R_{oriz}R_{vert}=\frac{\pi}{2}\frac{V}{2}\frac{p}{2}=\frac{\pi}{8}p_1V_1$</td><td>1</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>$Q_{primit}=Q_{12}+Q_{03}+Q_{40}$, $Q_{12}=\Delta U_{12}+L_{12}$, $\Delta U_{12}=\nu C_V\left(T_2-T_1\right)$
$L_{12}=aria\left(1,2,V_0,V_1\right)=\frac{\pi}{16}p_1V_1+p_0\left(V_0-V_1\right)$,
$V_0=\frac{3}{2}V_1; p_0=\frac{3}{2}p_1$, $Q_{12}=\left(3+\frac{\pi}{16}\right)p_1V_1$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$Q_{03}=\nu C_p\left(T_3-T_0\right)=\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\gamma-1}p_1V_1$, $Q_{40}=\nu C_V\left(T_0-T_4\right)=\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma-1}p_1V_1$
$Q_{primit}=\left[3+\frac{\pi}{16}+\frac{3(\gamma+1)}{4(\gamma-1)}\right]p_1V_1$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\eta=\frac{L}{Q_{primit}}=\frac{2\pi(\gamma-1)}{(\pi+48)(\gamma-1)+12(\gamma+1)}$, $\gamma=\frac{5}{3}\Rightarrow\eta=\frac{2\pi}{\pi+96}\approx 0,0634$ $\eta=6,34\%$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Oficiu</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

(subiect propus de prof. dr. Adrian Dafinei – Universitatea Bucureşti, prof.dr. Constantin Corega – Colegiul Naţional „Emil Racoviţă” –Cluj-Napoca, prof. Stelian Ursu – Colegiul Naţional „FraţiiBuzeşti”- Craiova)

Notă:

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.